SAA Forum

Research Paper

März 2026

Portfoliooptimierung

7 Schritte Best Practice

Redouane Raki

redouane.raki@saa-forum.com

Inhaltsverzeichnis

Management Summary

Die Mean-Variance-Lösung unter linearen Restriktionen lässt sich als lineare Transformation der erwarteten Renditen durch die inverse Kovarianzmatrix interpretieren. Diese Struktur impliziert, dass die Optimierung nicht nur Information verarbeitet, sondern diese zugleich verstärkt. Insbesondere wirkt die Inversion der Kovarianzmatrix als Sensitivitätsoperator, sodass bereits geringe Schätzfehler in den Kovarianzen überproportionale Auswirkungen auf die resultierenden Portfolio-Gewichte haben können.

Während Unsicherheiten in den Renditeerwartungen direkt in die Optimierung eingehen, beeinflussen Fehler in der Kovarianzmatrix die Lösung auf struktureller Ebene und werden durch die Matrixinversion zusätzlich verstärkt. Infolgedessen ist die Mean-Variance-Optimierung inhärent anfällig für Schätzfehler und kann bei unkritischer Anwendung zu instabilen sowie ökonomisch schwer interpretierbaren Portfolios führen.

Die Optimierung fungiert somit als Verstärker der zugrunde liegenden Modellannahmen: Hochwertige, konsistente und robuste Inputs führen zu stabilen und plausiblen Portfolioallokationen, während fehlerbehaftete oder inkonsistente Inputs fragile und potenziell irreführende Ergebnisse erzeugen. Vor diesem Hintergrund besteht ein zentrales Ziel dieser Arbeit in der Entwicklung eines strukturierten „Best-Practice-Codex“, der die theoretischen Eigenschaften des Optimierungsproblems in konkrete Handlungsempfehlungen für die Praxis überführt.

Der Aufbau der Arbeit gliedert sich in drei Schritte. Zunächst werden die Kapitalmarktannahmen und das Investorprofil im Rahmen eines multivariaten Verteilungsmodells formalisiert. Anschließend wird das optimale Portfolio unter Budget- und linearen Restriktionen analytisch mittels Lagrange-Methoden hergeleitet und sowohl algebraisch als auch geometrisch interpretiert. Darauf aufbauend werden die gewonnenen theoretischen Erkenntnisse in einen umfassenden 7 Schritte-Best-Practice-Codex überführt, der insbesondere Aspekte wie die Konditionierung der Kovarianzmatrix, die Disziplinierung von Renditeannahmen, strukturelle Konsistenz, Sensitivitätsanalysen sowie Regularisierung adressiert.

Insgesamt zeigt die Arbeit, dass Portfoliooptimierung nicht als rein technisches Verfahren verstanden werden sollte, sondern als strukturell sensibles Abbildungsproblem, dessen Aussagekraft maßgeblich von der numerischen Stabilität, der statistischen Robustheit und der ökonomischen Konsistenz der zugrunde liegenden Annahmen abhängt.

1 Modellannahmen

1.1 Kapitalmarktmodell

Das Kapitalmarktmodell wird durch ein Anlageuniversum von n Assets bzw. Assetklassen abgebildet.

Jeder Asset i verfügt über eine Zeitreihe von empirischen Renditevektoren R_i.

Aus diesen n Vektoren ergeben sich Mittelwerte μ_i, Volatilitäten σ_i, Korrelationen $\rho_{(i,j)}$ und Kovarianzen [1]$c_{(i,j)}$. Aggregiert betrachtet, sprechen wir über eine n-dimensionale Renditeverteilung $R(\mu,C)$.

Anderseits kann eine Kovarianzmatrix als Produkt von Volatilitäten und Korrelationen geschrieben werden: $C = D\ \rho\ D$, mit $D = \mathrm{diag}(\sigma_i, i=1,\ldots n)$ die Diagonalmatrix der Volatilitäten und ρ die Korrelationsmatrix.

Diese Darstellung erlaubt es, unterschiedliche Komponenten der Risikostruktur separat zu betrachten.

1.2 Investorprofil

Im Kapitalmarkt gilt das Prinzip „mehr Rendite“ für „mehr Risiko“ und umgekehrt. Dies bedeutet, dass ein Anspruch auf mehr [2]Rendite bzw. die Bereitschaft mehr Risiko einzugehen mit mehr Exponierung auf Risiko bzw. mehr Rendite kompensiert werden soll. Aus Sicht der Investoren ist die Rendite gut, während Risiko schlecht ist. Dadurch ergibt das Investment-Dilemma: Wieviel Risiko darf ein Investor eingehen im Rahmen seiner Renditeerwartung? Dieses Dilemma lässt sich wir mit Hilfe der Nutzenfunktion N darstellen:

Nutzenfunktion = Eigene Renditeerwartung - Eigene Risikoaversion

Jeder Investor, der ein Kapital rational investiert, ist herausgefordert die eigene Nutzenfunktion zu maximieren. Während sich die eigene Renditeerwartung quantitativ bestimmt werden kann, lässt die eigene Risikoaversion hingegen eher subjektiv messen.

Eigene Renditeerwartung: Sie lässt sich anhand des Vektors der erwarteten Renditen aller Anlageklassen des Portfolios berechnen, gewichtet mit der eigenen Portfoliozusammensetzung

Eigene Risikoaversion: Risikoaversion bezeichnet die Tendenz, risikoärmere Ergebnisse risikoreicheren vorzuziehen, selbst wenn die risikoreichere Option potenziell höhere Renditen verspricht. In der Portfoliotheorie wird die Risikoaversion durch einen Bruchteil oder ein Vielfaches (λ) der Portfoliovarianz dargestellt.

Mathematische Darstellung:

Sei C die Kovarianzmatrix der Assetklassen im Anlageuniversum, r der entsprechende Vektor der Renditeerwartungen und x der Vektor der prozentualen Investitionen unseres λ-Invetors. Dann gilt:

Eigene Renditeerwartung = $r'x$

Eigene Risikoaversion = $\lambda * x'Cx$

Nutzenfunktion = $r'x - \lambda * x'Cx$

[1] $c_{(i,j)} = \rho_{(i,j)} * \sigma_i * \sigma_j$

[2] *Immer relativ betrachtet bzw. im Vergleich zu einer risikolosen oder risikoarmen Assetklasse*

2 Das optimale Portfolio

Gegeben ist unser Anlageuniversum mit n Assets und einen λ-Investor der die eigene Nutzenfunktion:

$U(x) = r^T x - \lambda x^T C x$ unter den folgenden Nebenbedingungen maximiert:

$1^T x = 1$: Budget Restriktion

$A^T x = b$: [3]Lineare Investmentrestriktion

Dabei gilt: $x \in \mathbb{R}^n$: Portfolio-Gewichte, $r \in \mathbb{R}^n$: erwartete Renditen des Investors, $\lambda > 0$: Risikoaversion, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$: die Kovarianzmatrix, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$: die Matrix der linearen Restriktionen, $b \in \mathbb{R}^m$: Zielwerte-Vektor der Restriktionen.

2.1 Satz

Das optimale Portfolio x des Investors unter den Nebenbedingungen $1^T x = 1$ und $A^T x = b$ ist gegeben durch

$$x = \frac{1}{2\lambda} C^{-1}(r + \gamma 1 + A\eta)$$

wobei die Multiplikatoren γ und η durch das Lagrange lineare Gleichungssystem bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} 1^T C^{-1} 1 & 1^T C^{-1} A \\ A^T C^{-1} 1 & A^T C^{-1} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda - 1^T C^{-1} r \\ 2\lambda b - A^T C^{-1} r \end{pmatrix}$$

2.2 Beweis

Zur Lösung des Optimierungsproblems wird die [4]Lagrange-Funktion formuliert:

$L(x, \gamma, \eta) = r^T x - \lambda x^T C x + \gamma(1^T x - 1) + \eta^T(A^T x - b)$

Die Optimalitätsbedingung erster Ordnung ergibt sich aus der Gradient-Ableitung nach x:

$\nabla_x L = r - 2\lambda Cx + \gamma 1 + A\eta = 0$

Daraus folgt: $2\lambda\, Cx = r + \gamma 1 + A\eta$. Und damit: $x = \frac{1}{2\lambda} C^{-1}(r + \gamma 1 + A\eta)$

Durch Einsetzen die Darstellung von x in die Nebenbedingungen (Budgetrestriktion $1^T x = 1$ und Investmentrestriktion: $A^T x = b$) ergeben sich die zwei Gleichungen für die Lagrange Multiplikatoren γ und η.

$$\frac{1}{2\lambda} 1^T C^{-1}(r + \gamma 1 + A\eta) = 1$$

$$\frac{1}{2\lambda} A^T C^{-1}(r + \gamma 1 + A\eta) = b$$

Eine geschickte algebraische Umformung dieser beiden Gleichungen ergibt genau das Lagrange lineare Gleichungssystem.

[3] $B^T x <= u$ Restriktionen könnte man durch $B^T x + \varepsilon = u$ bzw. $(B , I)^T *(x,\varepsilon) = u$ Restriktionen umschreiben und den optimalen Vektor (x , ε) suchen

[4] Die Lagrange Funktion transformiert das Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen zu einem Problem ohne Nebenbedingungen

2.3 Korollar

Mit M = [1^T ; A], d = [1 ; b] und ξ = (γ, η) ergibt sich die Kompakte Formel vom optimalen Portfolio:

$$x^* = \frac{1}{2\lambda} C^{-1}(r + M^T \xi^*)$$

wobei $M^T x = d$ und $\xi^* = (M^T C^{-1} M)^{-1} (2\lambda\, d - M^T C^{-1} r)$

Geometrisch gesehen zeigt sich das optimale Portfolio x* als Projektion vom optimalen Portfolio ohne Nebenbedingungen $C^{-1}r$ auf den zulässigen Raum $M^T x = d$. Das heißt, die Restriktionen „biegen" die unbeschränkte Lösung in den zulässigen Raum.

2.4 Eigenschaften

Das optimale Portfolio x* zeigt eine lineare Transformation der Renditen ($r + M^T\xi^*$) kombiniert mit einer Inversion der Risikostruktur (C^{-1}). Folglich könnten sowohl kleine Änderungen von r und C als auch instabile Kovarianz Matrizen zu großen Portfolioänderungen führen. Besonders die Inversion der Kovarianzmatrix kann numerische [5]Instabilität und erhebliche Portfolio-Turnover verursachen, da sie sowohl von Korrelationen als auch von Volatilitäten stark abhängig ist. Die x* Gleichung zeigt eindeutig auch, dass die optimale Portfoliostruktur von der Restriktionsmatrix A und dem Restriktionsvektor b abhängt. A und b intervenieren stark in der Struktur des Lagrange-Vektors ξ* bzw. durch die Lagrange Parameter γ und η. Kleine Änderungen in A und b können das gesamte Portfolio verschieben und „Knicke" in der Lösung erzeugen.

Da das optimale Portfolio proportional zu $C^{-1} (r + M^T\xi^*)$ ist, nutzt die Mean-Variance-Optimierung lineare Abhängigkeiten im Anlageuniversum sehr aggressiv aus. Wenn Assets stark korreliert sind, wird die Kovarianzmatrix nahezu singulär, was zu instabilen Portfolio-Gewichten führen kann.

2.5 Instabilität der Kovarianzmatrix

Zerlegung der Kovarianzmatrix: Die algebraische Zerlegung einer Kovarianzmatrix C in Volatilitäten und Korrelationen lässt sich mit Hilfe der Matrizenformel $C = D \cdot \rho \cdot D$ ausdrücken. D ist die Diagonalmatrix der Volatilitäten und ρ die Korrelationsmatrix.

Inversion der Kovarianzmatrix: Die Inversion ergibt sich aus der Matrizen-Inversion-Regel $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Es gilt also: $C^{-1} = D^{-1}\rho^{-1}D^{-1}$.

Die Inversion zerfällt in zwei Komponenten:

(i) D^{-1}: eine [6]stabile diagonale Skalierung

(ii) ρ^{-1}: eine strukturelle und potenziell [7]explodierende Komponente

Quelle der Instabilität: Die numerische Stabilität wird fast vollständig durch ρ^{-1} bestimmt. Bei sehr hohen Korrelationen (nahe 1) wird die Korrelationsmatrix ρ nahezu singulär. Dies führt zu sehr kleinen

[5] Wenn die Kovarianzmatrix schlecht konditioniert ist

[6] D enthält keine Interaktionen zwischen den Assets und ihre Konditionszahl K(D) = max_vola/min_vola i.d.R. nicht extrem groß.

[7] Hohe Korrelationen führen zu sehr kleinen Eigenwerten und damit könnte K(r)= max_eigenwert / min_eingenwert extrem groß werden.

Eigenwerten und einer hohen Konditionszahl. Die Inversion ρ^{-1} verstärkt dadurch kleine Störungen in den Eingangsdaten erheblich. Diese Verstärkung überträgt sich direkt auf C^{-1}.

3 7 Schritte Best Practice Codex

3.1 Empirische Optimierung durchführen

Eine initiale Analyse sollte auf empirischen Daten basieren, um die grundlegende Struktur der Renditeverteilung zu verstehen. Die Kovarianzmatrix stellt die Risikostruktur dar, und ihre Zerlegung in Volatilitäten und Korrelationen ermöglicht es, diese separat zu analysieren und zu interpretieren. In diesem Kontext ist die Auseinandersetzung mit Fragen wie Multikollinearität oder Stabilität der Korrelationen und Volatilitäten absolut notwendig. Eine erste und nützliche Übung ist eine Portfoliooptimierung auf Basis empirischer Daten durchzuführen, da die beiden Größen μ (langfristige Renditen) und C (langfristige Kovarianzmatrix) zusammengehören und aus derselben ökonomischen Verteilung stammen.

3.2 Views über Renditen ökonomisch formulieren

Ein Investor kann eigene Renditeerwartungen formulieren, die von den langfristigen Erwartungen abweichen. Dieses sollten ökonomisch fundiert, sinnvoll und vor allem miteinander konsistent sein. Wir bezeichnen diese Erwartungen mit r: $r \neq \mu$. In der klassischen Mean-Variance-Optimierung wird häufig angenommen, dass nur der Renditevektor angepasst wird, während die Kovarianzmatrix oft unverändert bleibt. Aber wenn $r \neq \mu$ gilt, beschreibt der Investor implizit eine andere Verteilung zukünftiger Renditen. Das bedeutet, dass sich nicht nur der erste Moment (der Mittelwert), sondern auch die höheren Momente der Verteilung verändern und damit die resultierenden Korrelationen mit anderen Assetklassen im Portfolio.

3.3 Kovarianzmatrix anpassen

Unter der Annahme einer empirischen Normalverteilung gilt: $R \sim N(\mu , C)$ und der Mittelwert μ liegt exakt im Zentrum der Verteilung. Wenn ein Investor stattdessen glaubt: $R \sim N(r , C)$ dann verschiebt sich die gesamte Verteilung. Diese Verschiebung kann auch Auswirkungen auf die beobachtete Volatilität und Kovarianzstruktur haben. Wenn ein Investor eigene Renditeerwartungen r formuliert, können mehrere Argumente für eine Anpassung der Kovarianzmatrix sprechen:

1. Eine Verschiebung des Erwartungswerts verändert die Lage der gesamten Verteilung.

2. Szenarien mit höheren erwarteten Renditen können mit höheren Volatilitäten verbunden sein.

3. Marktszenarien, die Rendite-Views begründen, können auch die Risiko-Struktur verändern

In der Praxis wird häufig angenommen, dass Korrelationen relativ [8]stabil bleiben, während Volatilitäten angepasst werden können. Damit bleibt die grundlegende Abhängigkeitsstruktur der Assets erhalten, während die Risikointensität einzelner Assets an die Investor-Views angepasst wird. Die sauberste Lösung bleibt jedoch, sowohl die Volatilitäten als auch die Korrelationen an den eigenen Views über die Renditen anzupassen, besonders bei der taktischen Asset Allocation, wo sich Renditeverteilungen häufig im Change-Modus befinden.

---

[8] *Diese Annahme soll jedoch empirisch und statistisch geprüft werden*

3.4 Kondition der Kovarianzmatrix prüfen und ggf. stabilisieren

Die Kovarianzmatrix ist zentral für die Stabilität der Optimierung. Da die Lösung auf C^{-1} basiert, können schlecht konditionierte Matrizen zu instabilen Ergebnissen führen. Die [9]Konditionszahl $\kappa(C)$ ist ein zentrales Stabilitätskriterium und sollte geprüft und ggf. durch [10]Shrinkage oder Regularisierung verbessert werden. Ist $\kappa(C)$ groß, so kann ein kleiner relativer Fehler in C zu einem stark vergrößerten Fehler in C^{-1} führen.

Wenn $\kappa(C)$ groß ist, dann bedeutet das meistens sehr kleine Eigenwerte, starke lineare Abhängigkeiten, hohe Korrelationen oder starke Multikollinearität. Und hier sind indikative Faustregeln, um Qualität der Konditionszahl zu beurteilen:

- $\kappa(C) < 10$: sehr gut und unkritisch. Die Matrix ist numerisch sehr stabil
- $10 \leq \kappa(C) < 100$: gut und akzeptabel. Die Matrix ist numerisch stabil
- $100 \leq \kappa(C) < 1000$: Die Matrix ist bereits spürbar empfindlich. Plausibilität Check
- $1000 \leq \kappa(C) < 10000$: Regularisierung empfehlenswert
- $\kappa(C) \geq 10000$: Regularisierung ist notwendig

Die Regularisierung stabilisiert die Lösung und reduziert die Verstärkung von Schätzfehlern. Sie ist integraler Bestandteil moderner Portfoliooptimierung. Durch Regularisierung wird die Inversion stabiler und extreme Ausreißer in den Gewichten werden begrenzt.

Grundform der Regularisierung:

Die effektive Regularisierung der Kovarianzmatrix erfolgt typischerweise durch eine Kombination aus einem Ridge-Term $C_{\text{ridge}} = C + \delta I$ und einem Shrinkage-Term $C_{\text{shrunk}} = (1 - \alpha)\, C + \alpha C_{\text{target}}$.

$$C_{\text{effektiv}} = (1-\alpha)(C+\delta I) + \alpha C_{\text{target}}$$

Der Parameter δ dient primär der numerischen Stabilisierung und erhöht die kleinsten Eigenwerte der Kovarianzmatrix. Der Parameter α steuert den Trade-off zwischen empirischer Information und struktureller Modellannahme. Das Target C_{target} repräsentiert dabei eine robuste, ökonomisch motivierte Approximation der Risikostruktur. Die Wahl dieser drei Komponenten bestimmt maßgeblich die Stabilität und Plausibilität der resultierenden Portfolioallokation.

Auswahl von δ (Ridge term):

Der Parameter δ hebt die kleinen Eigenwerte der Kovarianzmatrix an und verbessert die numerische Stabilität der Inversion. $\lambda_i(C_{\text{ridge}}) = \lambda_i(C) + \delta$. Die typische Wahl: $\delta \approx \varepsilon \cdot \lambda_{\max}(C)$, mit $\varepsilon \in [10^{-4}, 10^{-2}]$.

Auswahl von α (Shrinkage Intensität):

Der Parameter α steuert den Trade-off zwischen empirischer Kovarianzmatrix und Zielmatrix und reduziert strukturell extreme Korrelationen. Typische Werte für α liegen zwischen 0,1 und 0,3 (bei einer großen Datenmenge) und zwischen 0,3 und 0,7 (bei einer kleinen Datenmenge).

---

[9] *$K(C) = ||C|| \cdot ||C^{-1}||$.*

[10] *Schrumpfung*

Auswahl von C_{target}:

Im Shrinkage-Ansatz C_{shrunk} = (1-α).C + α. C_{target} übernimmt C_{target} die Rolle eines strukturellen Referenzmodells und enthält eine Art ökonomisches Wissen, während C die puren Rohdaten enthält. Insofern ist Shrinkage nichts anderes als: Data + Model. Typische Zielmatrizen sind:

1. Diagonal Target: C_{target}= diag(C) ist sehr stabil, perfekt konditioniert und ohne Multikollinearität

2. Konstante Korrelation Target: C_{target}= DρD ist robust, reduziert Noise massiv und enthält Diversifikation

3. [11]Faktor-Modell Target: C_{target}= BFB'+D ist stabil und v.a. ökonomisch interpretierbar. in B sind die Faktorladungen enthalten, während F die Kovarianzmatrix der gemeinsamen Faktoren. D ist das idiosynkratische Risiko ist.

3.5 Restriktionen bewusst wählen

Die Anlagerestriktionen treten nicht nur als Nebenbedingungen auf, sondern verändern den effektiven Renditevektor über $M^T\xi^*$ und formen dadurch die Lösung aktiv. Sie definieren den zulässigen Raum und beeinflussen die ökonomische Interpretation des Portfolios maßgeblich. Insofern eine pragmatische und praxisorientierte Wahl bzw. Formulierung der Anlagerestriktionen tragen maßgeblich zur Stabilisierung der Optimierungsergebnisse bei.

3.6 Sensitivitäts- und Robustheitsanalysen durchführen

Die Stabilität des optimalen Portfolios gegenüber kleinen Änderungen in r (Δr) und Änderungen in C (ΔC) muss überprüft werden. Instabile Lösungen sind in der Praxis nicht belastbar.

3.7 Portfolio interpretieren und plausibilisieren

Ein mathematisch optimales Portfolio ist nicht automatisch ökonomisch sinnvoll. Gewichte, Konzentration und Umsetzbarkeit müssen kritisch bewertet werden. Es ist nicht nur sinnvoll, sondern auch absolut unerlässlich, die Plausibilität des gewonnenen Portfolios zu überprüfen und es vor der Umsetzung mit den zugrunde gelegten Annahmen zu verbinden.

[11] *Für eine umfassende Beschreibung siehe „Risk and Asset Allocation (Meucci, 2005, Springer Finance Series)"*

4 Literaturquellen

- Markowitz (1952) Portfolio Selection
- Markowitz (1959) Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments
- Ledoit & Wolf (2004) Honey I Shrunk the Sample Covariance Matrix
- Fama & French (1993) Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds
- Black & Litterman (1992) Global Portfolio Optimization
- Risk and Asset Allocation (Meucci, 2005, Springer Finance Series)